



TITLE:

量子流体力学および量子乱流の理論的研究とその発展 (オイラー方程式250年: 連続体力学におけるオイラーの遺産)

AUTHOR(S):

小林, 未知数

CITATION:

小林, 未知数. 量子流体力学および量子乱流の理論的研究とその発展 (オイラー方程式250年: 連続体力学におけるオイラーの遺産). 数理解析研究所講究録 2008, 1608: 33-39

ISSUE DATE:

2008-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/139994>

RIGHT:

量子流体力学および量子乱流の理論的研究とその発展

大阪市立大学理学部物理学科 小林 未知数 (Michikazu Kobayashi)
Faculty of Science,
Osaka City University

1 イントロダクション

超流動液体 ^4He や ^3He において実現される量子流体现象、特に量子乱流は低温物理学分野において、現在でもなお活発に研究が行われている現象の1つであるが [1; 2]、近年さらに自然界における通常の乱流現象を要素還元的に理解するという視点において、低温物理学の範囲を超えて非常に注目を浴び、活発に議論されている。量子流体として最も古くから研究されてきた系が液体 ^4He である。液体 ^4He は 2.17K 以下において、構成要素である ^4He 原子が Bose-Einstein 凝縮を起こし、粘性が消失する超流動状態となる。この超流動現象は、流体全体が粘性のある常流体成分と、粘性のない超流体成分から成るという現象論的二流体モデルにおいて記述され [1]、超流動ダイナミクスのほとんどはこの二流体モデルによって理解される。常流体成分の要因は、 ^4He 原子の Bose-Einstein 凝縮からの熱的な素励起であり [3]、よって常流体成分のほとんど存在しない $T < 1\text{K}$ 領域の超流動 ^4He は、そのダイナミクスが量子力学のみによって支配される量子流体となる。

超流動 ^4He が持つ最も大きな特徴の1つが、Feynman によって予言され [4]、Vinen によって発見された量子渦である [5]。量子渦の特徴は以下の2点である。(i) 全ての量子渦は量子化された循環 $\kappa = \oint \mathbf{v} \times d\mathbf{s} = h/m$ を持つ (\mathbf{v} は流体の速度場、 $\oint d\mathbf{s}$ は渦回りの線積分、 m は ^4He 原子の質量)、(ii) 渦芯のサイズは非常に細く (^4He では約 1\AA)、渦糸近似が非常に現実的なモデルとなる [6]。この特徴は通常の流体 (古典流体) とは著しく異なり、渦の存在が循環量子を持つ位相欠陥として明確に定義できることを意味する。実際に量子渦は、回転容器中における量子渦格子 [7] や乱流中における量子渦タングル [8] 状態において実際に可視化された。

量子乱流は量子渦のタングル状態として実現される。近年、超流動 ^4He における対向振動回転円盤乱流 [9]、超流動 ^4He [10] および超流動 ^3He [11] におけるグリッド乱流において、そのエネルギースペクトルが古典乱流の最も重要な統計則である Kolmogorov 則に従い [12]、量子乱流が古典乱流との類似性を持つことが見出された。

また量子乱流を実現する新たな系として、1995 年に実現された中性アルカリ原子気体のボース・アインシュタイン凝縮体 [13–15] が考えられている。ボース・アインシュタイン凝縮体の超流動性は、渦が循環の量子化された量子渦になることによって示され、循環が量子化されていることは回転下におけるボース・アインシュタイン凝縮体中で量子渦

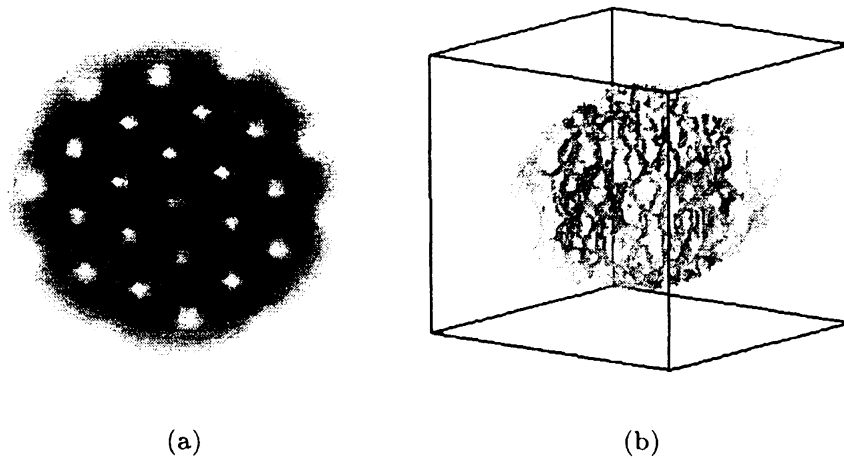


図 1: (a) : Gross-Pitaevskii 方程式を用いたシミュレーションにおける、ボース・アインシュタイン凝縮体上の量子渦格子。(b) : (a) と同様のシミュレーションにおける、ボース・アインシュタイン凝縮体上の量子乱流。量子渦の空間分布がプロットされている。

が渦格子構造を組むことによって確認された [16; 17]。また、この渦格子構造は後述する Gross-Pitaevskii 方程式の数値シミュレーションにおいても確認されている [18] (図 1(a))。このようなボース・アインシュタイン凝縮体に歳差回転 [19] を印可することによって、図 1(b) のような量子乱流が形成されることが理論的に予言されており、またそのエネルギースペクトルがやはり Kolmogorov 則に従うことが示されている。

Kolmogorov 則は発達した一様等方定常な非圧縮性古典乱流において成り立つ統計則である [12]。大きなスケールであるエネルギー保有領域からエネルギーが系に注入されると、そのエネルギーのスケールは慣性領域にて小さくなってゆく。慣性領域ではエネルギーが散逸することなく、系の詳細に依存しないスケール普遍性を持ち、非圧縮性運動エネルギーのスペクトルが Kolmogorov 則

$$E_{\text{kin}}^i(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3} \quad (1)$$

に従う。ここで $E_{\text{kin}}^i(k)$ は $E_{\text{kin}}^i = \int dk E_{\text{kin}}^i(k)$ で定義されるエネルギースペクトル、 E_{kin}^i は単位質量あたりの非圧縮性運動エネルギー、 k は Fourier 変換の波数である。粘性が有効になるエネルギー散逸領域においてエネルギーは散逸率 ε で散逸するが、これは慣性領域におけるエネルギー流束に等しい。Kolmogorov 定数 C はオーダー 1 の無次元量である。

古典乱流における Kolmogorov 則は通常、大きな渦が小さな渦へと分裂してゆくという Richardson カスケードという描像で理解される [12] が、古典流体では渦そのものの定義が粘性拡散のために不明瞭であるため、Richardson カスケードという描像は概念的なものである。一方、量子乱流における量子渦は循環量子 κ を持った、明確に定義される位相欠陥である。つまり、量子渦は古典流体中の渦に付随する粘性散逸といったようなよけいな自由度を取り除いた渦の本質のみの形となっており、これを構成要素とする量子乱流は、Kolmogorov 則と Richardson カスケードの関係といったような、渦のダイナミクスと乱流の統計則との関係をより明確にするプロトタイプであるかもしれない。我々は本研究でこ

の描像をより詳しく調べるために、量子流体のダイナミクスを記述する Gross-Pitaevskii 方程式の数値シミュレーションを行って調べた。

2 Gross-Pitaevskii 方程式

ボース系における超流動は、低温において粒子の物質波がすべて重なって量子力学的巨視的波動関数を形成する、Bose-Einstein 凝縮によって引き起こされる。Bose-Einstein 凝縮によって形成される巨視的波動関数 $\Phi(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t)e^{i\phi(\mathbf{x}, t)}$ のダイナミクスは Gross-Pitaevskii(GP) 方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{x}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu + g|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2 \right] \Phi(\mathbf{x}, t) \quad (2)$$

によって記述される。ここで μ は化学ポテンシャル、 g は粒子間相互作用の結合定数、 $\rho(\mathbf{x}, t) = f^2(\mathbf{x}, t)$ は凝縮体密度、 $\phi(\mathbf{x}, t)$ は凝縮体の位相である。流体の速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ は $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \hbar/m \nabla \phi(\mathbf{x}, t)$ で与えられ、非粘性のポテンシャル流となる。よって渦度 $\text{rot } \mathbf{v}$ は Φ の単連結領域では存在せず、 Φ の位相欠陥でのみ値を持つ。つまり Φ の位相欠陥が量子渦の定義そのものになる。量子渦の回りでは循環が $\kappa = h/m$ に量子化され、芯のサイズは回復長 $\xi = \hbar/\sqrt{2mg\rho}$ で与えられる ($\bar{\rho}$ は平均の密度)。

GP 方程式を密度 ρ と速度場 \mathbf{v} を用いて書き直すと (Madelung 変換)、

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot [\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)] = 0 \quad (3a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \nabla v^2(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{m\rho(\mathbf{x}, t)} \nabla \left\{ \frac{\hbar^2}{m} \rho(\mathbf{x}, t) \left[4\pi a \rho(\mathbf{x}, t) - \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho(\mathbf{x}, t)}}{2\sqrt{\rho(\mathbf{x}, t)}} \right] \right\} \quad (3b)$$

となり、連続方程式と Euler 方程式が得られる。GP 方程式とオリジナルの Euler 方程式との違いは渦度が量子化されていることであり、それによる量子渦の再結合過程である。2本の量子渦が接近すると図2のような再結合が起こることが GP 方程式の数値シミュレーションにより確かめられている [20–22]。GP 方程式では再結合が密度の零点のみで起こるので、Kelvin の循環定理を抵触しない。しかし Euler 方程式では GP 方程式のような渦構造とはなっていないため、そもそも渦が再結合をするのかどうかすら自明ではない (Navier-Stokes 方程式では粘性が Kelvin の循環定理を破るため再結合が起こる [23])。実際に Euler 方程式を用いた乱流のシミュレーションが研究されているが、エネルギーカスケードの描像は非常に複雑である [24]。このように GP 方程式は再結合による量子渦のカスケード過程が明確であり、Euler 方程式に比べて乱流と渦のカスケード過程との関係性を調べるには良い系であると言えるであろう。

3 計算方法

GP 方程式の数値シミュレーションを議論する前に、Vinen によって提唱された量子乱流の描像 (図3) を考える [2]。エネルギー注入によって大きな渦輪が形成され、慣性領域

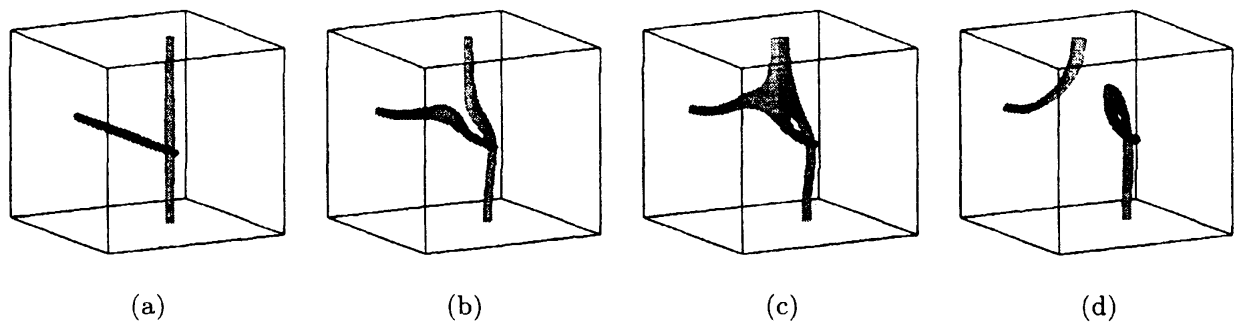


図 2: ねじれの位置にあった 2 本の量子渦の再結合。(a): 初期状態。(b): 2 本の渦の結合直前。(c): 2 本の渦の結合。(d): 渦がつなぎ変わった後、離れてゆく。(a)-(d) の過程は量子渦の再結合と呼ばれている。図中では渦の位置のみが表示されている。

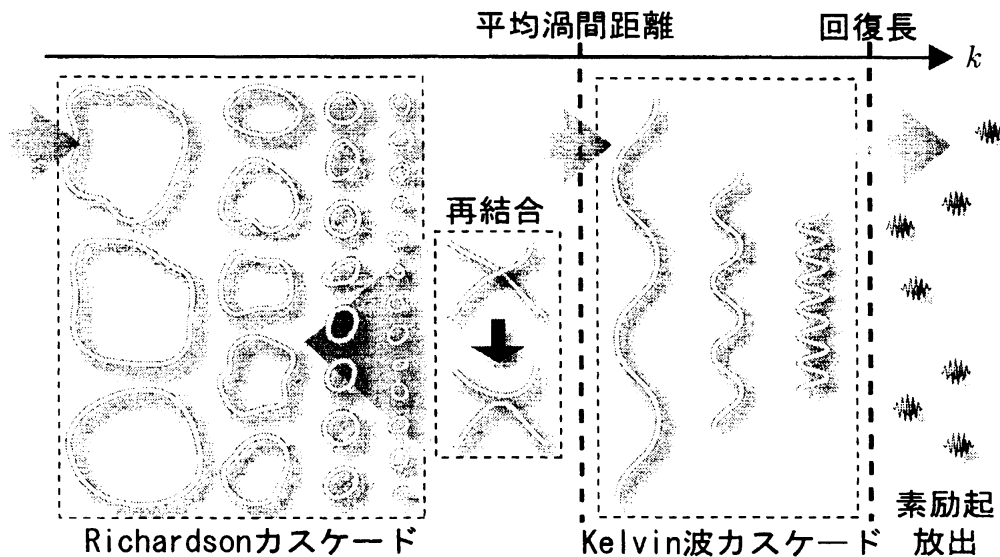


図 3: Vinen によって提唱された量子乱流の描像。

において Richardson カスケードにより小さな渦輪へと分裂してゆくのは古典流体の描像と同じである。しかし平均渦間距離よりも小さなスケールでは Richardson カスケードはもはや有効ではなく、その代わりに渦の上に励起された Kelvin 波が、非線形性のために短波長へとカスケードしてゆく Kelvin 波カスケード過程の描像が成り立つと考えられている。そして渦芯のスケールにまで Kelvin 波の波長が短くなるともはや渦としての構造を保てなくなり、素励起へと崩壊する。Kelvin 波は渦が量子化されているからこそ明確に定義でき、従って Kelvin 波カスケードは量子乱流特有の現象であるといえよう。このように量子乱流では 2 種類の自己相似的なカスケード過程が存在すると考えられている。また GP 方程式には上述したような量子渦の素励起への崩壊過程は含まれていない。そこで実際に GP 方程式の数値シミュレーションを行う際には現象論的な散逸項 γ を用いて、この過程を導入する。

GP 方程式の数値解法には周期境界条件下でのスペクトル法を用い、よって (2) 式の Fourier 変換

$$[i - \gamma(k)] \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{k}, t) = [k^2 - \mu(t)] \Phi(\mathbf{k}, t) + \frac{g}{V^2} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \Phi(\mathbf{k}_1, t) \Phi^*(\mathbf{k}_2, t) \Phi(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, t) \quad (4)$$

を数値的に解く。ここで V は系の体積である。散逸項は $\gamma(k) = \gamma_0 \theta(k - 2\pi/\xi)$ の形をしており、回復長 ξ よりも短いスケールでのみ値を持つ。また散逸項の導入は全粒子数 $N = \int d\mathbf{x} |\Phi|^2$ を保存させないため、それを回避するために化学ポテンシャルに時間依存性を与え、粒子数を保存させる。

(4) 式の右辺第 2 項である非線形項はそのまま計算せずに変換法を用いる。またエリャジングエラー除去のために位相シフト法を用いる。時間発展には 4 次精度の Runge-Kutta 法を用いる。数値計算は 512^3 格子点の箱の中で行い、空間解像度は $\Delta x = 0.125\xi$ 、時間解像度は $\Delta t = 0.0001 m\xi^2/\hbar$ を用いる。乱流生成のためのエネルギー注入として、半径 $R = 16\xi$ の渦輪を含む波動関数 Φ_{ring} をランダムな位置に周期 $T = 0.001 m\xi^2/\hbar$ で重ね合わせる。

4 計算結果

乱流の定常状態は $t \geq 25$ で得られる。 $t = 25$ における量子渦の分布を図 4(a) に示すが、量子渦が非常に絡まったタングル状態となっていることが分かる。次に非圧縮性運動エネルギー

$$E_{\text{kin}}^i = \frac{\hbar^2}{2m^2 N} \int d\mathbf{x} [\{f(\mathbf{x}, t) \nabla \theta(\mathbf{x}, t)\}^i]^2 \quad (5)$$

のスペクトルを計算する。ここで $\text{div}\{\dots\}^i = 0$ である。図 4(b) は得られたエネルギースペクトルであるが、注入される渦輪のスケール R と L を全渦糸長としたときの平均渦間距離 $\sqrt{V/L}$ との間の領域 (領域 I) と、平均渦間距離と回復長 ξ との間の領域 (領域 II) の 2 つの領域においてエネルギースペクトルが異なる冪に従っていることが分かる。また領域 I におけるエネルギースペクトルの Kolmogorov 則との一致は非常に良い。これは得られたエネルギースペクトルが、Vinen によって提唱された量子乱流の描像 (図 3) を明確に示していることを表す。つまり領域 I では量子渦の Richardson カスケードが、領域 II では量子渦の Kelvin 波カスケードが起こっていると理解できる。Kelvin 波カスケード過程におけるエネルギースペクトルは本計算においておよそ $E_{\text{kin}}^i \propto k^{-6}$ となっており、またこれに関して幾つかの理論的な予測がなされているが、統一的な理解は未だ得られていない。

最後に量子渦の自己相似的構造を調べるために、あるスケール σ で粗視化した全渦糸長 $L(\sigma)$ を計算する。図 4(c) は $L(\sigma)$ の σ 依存性であるが、およそ $L \propto \sigma^{-2.5}$ となっており、ここから量子渦はフラクタル次元が 2.5 の自己相似的構造を持っていることが分かる。

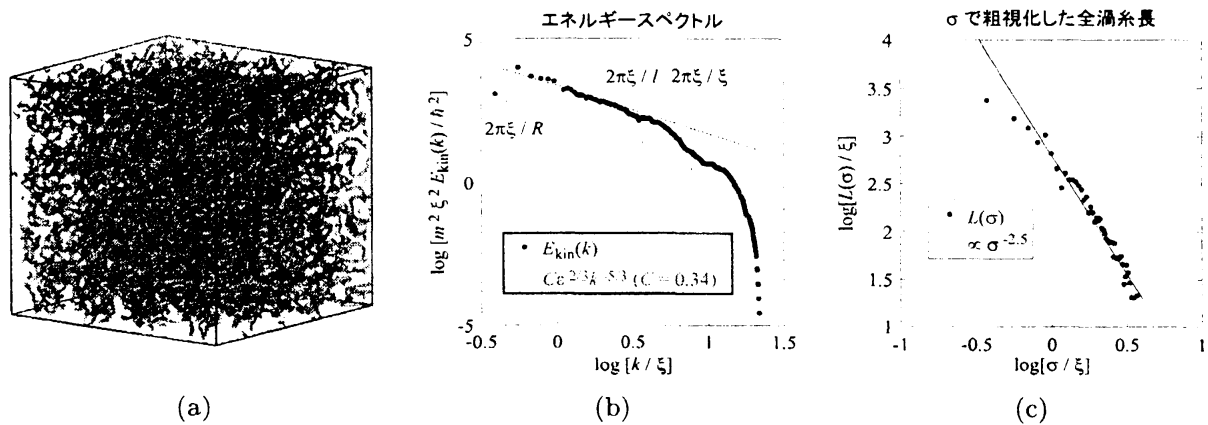


図 4: (a): 定常乱流状態における量子渦の分布。(b): 非圧縮性運動エネルギーのスペクトル。(c): 長さ σ で粗視化した全渦糸長。(b) と (c) では $t \geq 25$ における 25 個のアンサンブル平均を行っている。また Kolmogorov 定数 C の計算に関しては [25; 26] を参照。

5 量子乱流の今後の展望

これまで量子力学の物性への応用はほとんど固体に限定されてきた。しかし本研究を通して、量子流体力学が通常の古典流体を要素還元的に理解できる可能性を持っていることが示された。つまり量子渦という概念が、流体の渦に有する非常に多くの複雑な自由度を減らす可能性を持っているということである。今後、量子渦という要素還元的な見方が、流体のより深い理解に貢献するであろうことが期待される。

また量子乱流は古典乱流にはない独自の性質をも兼ね備えており [27]、古典乱流では考えられてこなかった新しい物理をこれから提供する場ともなってくれるであろう。

参考文献

- [1] R. J. Donnelly, *Quantized vortices in helium II* (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).
- [2] W. F. Vinen and R. Donnelly, *Physics Today* **60**, 43 (2007).
- [3] I. M. Khalatnikov, *Introduction to the Theory of Superfluidity*, (Benjamin, New York, 1965).
- [4] R. P. Feynman, in *Progress in Low-Temperature Physics*, edited by C. J. Gorter (North-Holland, Amsterdam, 1955), Vol. I, p. 17.
- [5] W. F. Vinen, *Proc. Roy. Soc. A* **260**, 218 (1961).
- [6] K. W. Schwarz, *Phys. Rev. B* **31**, 5782 (1985); *ibid.* **B 38**, 2398 (1988).
- [7] E. J. Yarmchuck and R. E. Packard, *J. Low Temp. Phys.* **46**, 479 (1982).
- [8] G. P. Bewley, D. P. Lathrop, and K. R. Sreenivasan, *Nature* **441**, 588 (2006).
- [9] J. Maurer and P. Tabeling, *Europhys. Lett.* **43** (1), 29 (1998).

- [10] S. R. Stalp, L. Skrbek, and R. J. Donnelly, Phys. Rev. Lett. **82**, 4831 (1999).
- [11] D. I. Bradley, D. O. Clubb, S. N. Fisher, A. M. Guénault, R. P. Haley, C. J. Matthews, G. R. Pickett, V. Tsepelin, and K. Zaki, Phys. Rev. Lett. **96**, 035301 (2006).
- [12] U. Frisch, *Turbulence* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [13] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Science **269**, 198 (1995).
- [14] K. B. Davis, M. -O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995).
- [15] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, and R. G. Hulet, Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995).
- [16] K. W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, and J. Dalibard, Phys. Rev. Lett. **84**, 806 (2000).
- [17] J. R. Abo-Shaeer, C. Raman, J. M. Vogels, and W. Ketterle, Science **292**, 476 (2001).
- [18] K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Ueda, Phys. Rev. A **67**, 033610 (2003).
- [19] 歳差回転を用いた乱流形成の実験は、古典流体においてはすでに実現しており、S. Goto, N. Ishii, S. Kida, and M. Nishioka, Phys. Fluids **19**, 061705 (2007). において詳しく議論されている。
- [20] J. Koplik and H. Levine, Phys. Rev. Lett. **71**, 1375 (1993); *ibid.* **76**, 4745 (1996).
- [21] M. Leadbeater, T. Winiecki, D. C. Samuels, C. F. Barenghi, and C. S. Adams, Phys. Rev. Lett. **86**, 1410 (2001).
- [22] S. Ogawa, M. Tsubota, and Y. Hattori, J. Phys. Soc. Jpn. **71**, 813 (2002).
- [23] O. N. Boratav, R. B. Pelz, and N. J. Zabusky, Phys. Fluids. A **4**, 581 (1992)
- [24] C. Cichowlas, P. Bonaïti, F. Debbasch, and M. Brachet, Phys. Rev. Lett **95**, 264502 (2005)
- [25] M. Kobayashi and M. Tsubota, Phys. Rev. Lett. **94**, 065302 (2005).
- [26] M. Kobayashi and M. Tsubota, J. Phys. Soc. Jpn. **74**, 3248 (2005).
- [27] A. P. Finne, T. Araki, R. Blaauwgeers, V. B. Eltsov, N. B. Kopnin, M. Krusius, L. Skrbek, M. Tsubota, and G. E. Volovik, Nature **424**, 1022 (2003).